УДК 517.98

ОДИН ПРИМЕР СИМВОЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© Н.А. Малашонок

Ключевые слова: символьный алгоритм; системы уравнений в частных производных; преобразование Лапласа.

Приводится алгоритм символьного решения систем дифференциальных уравнений с частными производными на основе преобразования Лапласа–Карсона. Алгоритм демонстрируется на примере.

1. Введение

Применение преобразования Лапласа и Лапласа–Карсона для решения дифференциальных уравнений, в т. ч. и в частных производных, и их систем полезны и хорошо известны (например, [1–3]). Значение этих методов в настоящее время сильно возрастает в связи с необходимостью написания символьных алгоритмов решения такого рода задач. Они позволяют решать *символьно* уравнения и системы уравнений достаточно широкого класса произвольного размера и типа. В настоящей работе описывается и демонстрируется на примере алгоритм символьного решения, основанного на преобразовании Лапласа–Карсона.

2. Постановка задачи

Обозначим $\widetilde{m} = (m_1, \ldots, m_n)$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{\widetilde{m}} a^j_{\widetilde{m}k} \frac{\partial^m}{\partial^{m_1} x_1 \ldots \partial^{m_n} x_n} u_k(x) = f_j(x), \tag{1}$$

где $j = 1, \ldots, K,$ $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, K,$ – неизвестные функции переменной $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n_+$, $f_j \in S$, $a^j_{\widetilde{m}k}$ – действительные числа, m – порядок производной. Здесь и в дальнейшем производится суммирование по таким $\widetilde{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, что $m_1 + \ldots + m_n = m$.

Функции $f_j(x)$ имеют вид:

$$f_j(x) = f^i_j(x),\ x^i_j < x < x^{i+1}_j,\ i = 1, \ldots, I_j,$$

где $0 = x^1_j < x^2_j < .. < x^{I_j+1}_j = \infty$,

$$f^i_j(x) = \sum_{s=1}^{S^i_j} P^i_{js}(x) e^{b^i_{js} x}, \quad i = 1, \ldots, I_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

и $P^i_{js}(x) = \sum_{l=0}^{L^i_{js}} c^{ji}_{sl} x^l$ – полиномы степени L^i_{js}.

Обозначим через $\mathbf{A}$ класс функций, представимых в виде (2).

3. Преобразование Лапласа–Карсона

Рассмотрим пространство S функций $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n_+$, $\mathbf{R}^n_+ = \{x : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$, для которых $\mathcal{M} > 0, a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, существует такие, что для $x \in \mathbf{R}^n_+$ имеет место оценка: $|f(x)| \leq \mathcal{M}e^{ax}$, $ax = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$.

На пространстве S определим преобразование Лапласа–Карсона (**LC**):

$$LC : f(x) \mapsto F(p) = p^1 \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx,$$

$$p = (p_1, \ldots, p_n), \quad p^1 = p_1 \ldots p_n,$$

$$px = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \quad dx = dx_1 \ldots dx_n.$$

В классе $\mathbf{A}$ LC выполняется символьно.

Мы решаем задачу с начальными условиями по каждой переменной, задавая значения неизвестных и их производных в нулях соответствующих переменных. Введем обозначения для начальных условий. Обозначим через Γ^{ν}, $1 \leq \nu \leq n$, множество векторов $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ таких, что $\gamma_i = 0$, при $i < \nu$, $\gamma_\nu = 1$, $\gamma_i \in \{0, 1\}$, при $i > \nu$. Общее число векторов в множестве Γ^{ν} равно $2^{n-\nu}$.

Обозначим через $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_i = 0, \ldots, m_i$, множество индексов таких, что производная функции $u^k(x)$ порядка β_i по переменной i, $i = 1, ..n$, равна $u^k_{\beta,\gamma}(x^{(\gamma)})$ в точке $x = x^{(\gamma)} = ((1-\gamma_1)x_1, (1-\gamma_2)x_2, \ldots, (1-\gamma_n)x_n)$. Функции $u^k_{\beta,\gamma}(x^{(\gamma)})$ должны принадлежать классу $\mathbf{A}$.

Пусть $LC : u^k \mapsto U^k, u^k_{\beta,\gamma}(x^{(\gamma)}) \mapsto U^k_{\beta,\gamma}(p^{(\gamma)}), f_j \mapsto F_j$, обозначение $p^{(\gamma)}$ соответствует обозначению $x^{(\gamma)}$. Обозначим через $\|\gamma\|$ количество единиц в γ, $p^{\widetilde{m}} = p_1^{m_1} \ldots p_n^{m_n}$.

Тогда

$$LC : \frac{\partial^m}{\partial^{m_1} x_1 \ldots \partial^{m_n} x_n} u_k(x) \ \mapsto$$

$$p^{\widetilde{m}} U^k(p) \ + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\beta_\nu=0}^{m_\nu} \ \sum_{\gamma \in \Gamma^\nu} (-1)^{\|\gamma\|} p_1^{m_1-\beta_1-\gamma_1} \ldots p_n^{m_n-\beta_n-\gamma_n} U^k_{\beta,\gamma}(p^{(\gamma)}).$$

Обозначим

$$\Phi^j_{mk} = \sum_{\widetilde{m}} a^j_{\widetilde{m}k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\beta_\nu=0}^{m_\nu} \sum_{\gamma \in \Gamma^\nu} (-1)^{\|\gamma\|} p_1^{m_1-\beta_1-\gamma_1} \ldots p_n^{m_n-\beta_n-\gamma_n} U^k_{\beta,\gamma}(p^{(\gamma)}).$$

В результате преобразования Лапласа–Карсона системы (1) в соответствии с начальными условиями мы получим алгебраическую систему линейных уравнений относительно U^k:

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{\widetilde{m}} a^j_{\widetilde{m}k} p^{\widetilde{m}} U^k(p) = F_j - \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=0}^{M} \Phi^j_{mk}, j = 1, \ldots, K. \tag{3}$$

4. Решение алгебраической системы и условия согласованности начальных условий. Обратное преобразование Лапласа–Карсона

Для решения систем линейных уравнений существуют эффективные методы (например, [4–7]), выбирать которые можно в соответствие с размером и плотностью систем.

На этом этапе встает вопрос определения условий согласованности начальных условий. С их учетом получаем решение системы (1).

Обозначим через D определитель системы (3), D_i миноры максимального порядка расширенной матрицы системы (3). Наиболее интересным представляется случай, когда существует множество $\mathcal{Q}$ нулей D с бесконечно удаленной точкой в пространстве $\operatorname{Re} p_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Мы получаем решения U^k системы (1) в виде дробей с D в знаменателе. Обратное преобразование Лапласа–Карсона возможно, если существуют такие α_k, $k = 1, \ldots, n$, что эти решения голоморфны в области $\operatorname{Re} p_k > \alpha_k$. Поэтому предъявляем требование: D_i должен иметь нули на $\mathcal{Q}$ кратности, не меньшей, чем такие же нули D. Это условие накладывает требование к LC образам начальных условий, а следовательно, и к начальным условиям исходной системы. Мы получаем т. н. условия согласованности.

Заметим, что на данный момент мы можем выполнять обратное преобразование Лапласа–Карсона *символьно* при выполнении следующих условий на форму решения алгебраической системы:

– решения представлены в виде суммы простых дробей с экспонентами в роли коэффициентов,

– знаменатели этих дробей разложены на линейные множители над $\mathbb{C}$.

5. Пример

Чтобы продемонстрировать описанный алгоритм, рассмотрим подробно пример: решение следующей системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ на $\mathbf{R}^3_+$:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x}f + \frac{\partial}{\partial z}g + \frac{\partial}{\partial y}h & = & x \\ \frac{\partial}{\partial z}f + \frac{\partial}{\partial x}g + \frac{\partial}{\partial y}h & = & y \\ \frac{\partial}{\partial y}f + \frac{\partial}{\partial x}g + \frac{\partial}{\partial z}h & = & z \end{array} \tag{4}$$

Рассматриваем задачу с начальными условиями – значениями неизвестных функций в нулях. Так как мы имеем производные третьего порядка по каждой переменной, нам требуется девять функций для начальных условий – по три для каждой неизвестной функции в $(0,y,z)$, $(x,0,z)$, $(x,y,0)$, соответственно порядку производных. Естественное требование – совпадение значений соответствующих функций на пересечении этих плоскостей.

Обозначим:

$$\begin{array}{lll} f(0,y,z) = f^x, & g(0,y,z) = g^x, & h(0,y,z) = h^x, \\ f(x,0,z) = f^y, & g(x,0,z) = g^y, & h(x,0,z) = h^y, \\ f(x,y,0) = f^z, & g(x,y,0) = g^z, & h(x,y,0) = h^z. \end{array}$$

Обозначим LC образы функций f, g, h соответственно как u, v, w . Для наглядности расположим в таблицу LC образы начальный условий, обозначенные буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta, \varepsilon, \xi, \tau, \sigma$:

Таблица 1

	(q,r)	(p,r)	(p,q)
f	α	η	δ
g	ε	ξ	β
h	τ	γ	σ

В табл. 1 первая колонка указывает функции, LC образы начальных условий по которым рассматриваются. Первая строка указывает переменные, от которых зависят эти образы.

После LC преобразования получаем алгебраическую систему:

$$\begin{array}{c} pu+rv+qw-p\alpha-r\beta-q\gamma=\frac{1}{p}, \\ ru+pv+qw-r\delta-p\varepsilon-q\gamma=\frac{1}{q}, \\ qu+pv+rw-q\eta-p\varepsilon-r\sigma=\frac{1}{r}. \end{array} \tag{5}$$

Решение этой системы:

$$u=-\frac{-pq^2+pqr+qr^2-r^3}{qr(p-r)(q-r)(p+q+r)}-$$
$$-\frac{(-p^2q^2r+p^2qr^2)\alpha+(-pq^2r^2+pqr^3)\beta+(pq^2r^2-q^2r^3)\gamma}{qr(p-r)(q-r)(p+q+r)}-$$
$$-\frac{(pq^2r^2-qr^4)\delta+(pq^2r^2-pqr^3)\varepsilon+(-pq^3r+q^3r^2)\eta+(-pq^2r^2+q^2r^3)\sigma}{qr(p-r)(q-r)(p+q+r)},$$

$$v=-\frac{-p^2q^2+q^3r+p^2r^2-qr^3}{pqr(p-r)(q-r)(p+q+r)}-$$
$$-\frac{(p^2q^3r-p^2qr^3)\alpha+(pq^3r^2-pqr^4)\beta+(p^2q^2r^2-pq^2r^3)\gamma}{pqr(p-r)(q-r)(p+q+r)}-$$
$$-\frac{(-pq^3r^2+p^2qr^3)\delta-(p^3q^2r+p^2q^3r-p^3qr^2)\varepsilon}{pqr(p-r)(q-r)(p+q+r)}+$$
$$+\frac{(-p^2q^3r+pq^3r^2)\eta+(-p^2q^2r^2+pq^2r^3)\sigma}{pqr(p-r)(q-r)(p+q+r)},$$

$$w=\frac{-p^2q+q^2r+p^2r-qr^2}{qr(p-r)(q-r)(p+q+r)}+$$
$$+\frac{(p^2q^2r-p^2qr^2)\alpha+(pq^2r^2-pqr^3)\beta+(p^2q^2r+pq^3r-pq^2r^2-q^3r^2)\gamma}{qr(p-r)(q-r)(p+q+r)}+$$
$$+\frac{(-q^2r^3+p^2qr^2)\delta-(pq^2r^2-pqr^3)\varepsilon+(-p^2q^2r+q^2r^3)\eta+(-p^2qr^2+qr^4)\sigma}{qr(p-r)(q-r)(p+q+r)}.$$

Определитель этой системы:

$$D=-(p-r)(q-r)(p+q+r).$$

Множитель $(p+q+r)$ не важен, его нули не принадлежат $\mathcal{Q}$.

Таблица 2

	$p=r$	$q=r$
$\alpha(q,r)$	$\alpha(q,r)$	$\alpha_2(q,r)$
$\varepsilon(q,r)$	$\varepsilon(q,r)$	$\varepsilon_2(r,r)$
$\tau(q,r)$	$\tau(q,r)$	$\tau_2(r,r)$
$\theta(p,r)$	$\theta_1(r,r)$	$\theta(p,r)$
$\xi(p,r)$	$\xi_1(r,r)$	$\xi(p,r)$
$\gamma(p,r)$	$\gamma_1(r,r)$	$\gamma(p,r)$
$\delta(p,q)$	$\delta_1(r,q)$	$\delta_2(p,r)$
$\beta(p,q)$	$\beta_1(r,q)$	$\beta_2(p,r)$
$\sigma(p,q)$	$\sigma_1(r,q)$	$\sigma_2(p,r)$

Рассмотрим множества $p=r,\ q=r$. Потребуем, чтобы числители функций u, v, w обращались в ноль на этих множествах. Получаемые новые функции обозначаем следующим образом (см. табл. 2): если мы получаем новую функцию, полагая $p=r$, берем ее с индексом 1, если полагая $q=r$, берем функцию с индексом 2.

Подставляя $p=r$ и $q=r$ в числители u, v, w, мы получаем 6 уравнений относительно функций $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\delta,\ldots,\delta_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-rq^2+2qr^2-r^3-(r^3q^2-qr^4)\alpha+(-q^2r^3+qr^4)\beta_1 & + & \\
+(q^2r^3-qr^4)\delta_1+(q^2r^3-qr^4)\varepsilon & = & 0\\
q^3r-q^2r^2-qr^3+r^4+(q^3r^3-qr^5)\alpha+(q^3r^3-qr^5)\beta_1 & - & \\
-(q^3r^3-qr^5)\delta_1-(q^3r^3-qr^5)\varepsilon & = & 0\\
-q^2r+2qr^2-r^3+(-q^2r^3+qr^4)\alpha+(-q^2r^3+qr^4)\beta_1 & + & \\
+(q^2r^3-qr^4)\delta_1+(q^2r^3-qr^4)\varepsilon & = & 0\\
(pr^4-r^5)\gamma+(pr^4-r^5)\delta_2+(-pr^4+r^5)\eta+(-pr^4+r^5)\sigma_2 & = & 0\\
(p^2r^4-pr^5)\gamma+(p^2r^4-pr^5)\delta_2+(-p^2r^4+pr^5)\eta+(-p^2r^4+pr^5)\sigma_2 & = & 0\\
(-p^2r^3+r^5)\gamma+(-p^2r^3+r^5)\delta_2+(p^2r^3-r^5)\eta+(p^2r^3-r^5)\sigma_2 & = & 0
\end{array}\right.$$

Решая, получаем два условия на них:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & = & -\frac{q-r}{qr^2}-\beta_1+\delta_1+\varepsilon,\\
\gamma & = & -\delta_2+\eta+\sigma_2.
\end{array} \tag{6}$$

Мы можем взять произвольно все образы начальных условий, кроме α и $\gamma,$ и получить α и γ в соответствии с условием (3).

Например, можем взять такие функции.

Таблица 3

	(q,r)	(p,r)	(p,q)
f	$-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{qr^2}$	$\frac{1}{pr}$	$\frac{1}{p^2q}$
g	$\frac{1}{qr^2}$	$\frac{1}{p^2r}$	$\frac{1}{pq}$
h	$\frac{1}{qr}$	$\frac{1}{pr^2}-\frac{1}{p^2r}+\frac{1}{pr}$	$\frac{1}{pq^2}$

Соответствующие начальные условия будут такими:

$$f^x=\frac{1}{2}\left(-z^2+2yz\right),\qquad g^x=\frac{yz^2}{2},\qquad h^x=yz,$$

$$f^y=xz,\qquad g^y=\frac{x^2z}{2},\qquad h^y=\frac{1}{2}\left(2xz-x^2z+xz^2\right),$$

$$f^z = \frac{x^2 y}{2}, \quad g^z = xy, \quad h^z = \frac{xy^2}{2}. \tag{7}$$

Подставляя $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ из табл. 3 в u, v, w после обратного LC преобразования получаем решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям (4):

$$\begin{gathered}
f = 1/6(3x^2y - 6xyz + 6yz^2 - 2z^3 - 3(x-z)^2 H(-x+y)H(-x+z)+\\
+2(-x+z)^3 H(-x+y)H(-x+z) + 6y(y-z)H(-y+z)+\\
+6x(-y+z)H(-y+z) + 2(-y+z)^3 H(-y+z) + 6x(y-z)H(-x+y)H(-y+z)+\\
+2(y-z)^3 H(-x+y)H(-y+z) + 6y(-y+z)H(-x+y)H(-y+z));\\
g = 1/6(6xy + 6xz - 12xyz + 3z^2 + 3yz^2 - 2z^3 - 3(x-z)^2 H(-x+y)H(-x+z)+\\
+2(-x+z)^3 H(-x+y)H(-x+z) + 6y(y-z)H(-y+z) + 6x(-y+z)H(-y+z)+\\
+2(-y+z)^3 H(-y+z) + 6x(y-z)H(-x+y)H(-y+z)+\\
+2(y-z)^3 H(-x+y)H(-y+z) + 6y(-y+z)H(-x+y)H(-y+z));\\
h = 1/6(3xy^2 - 3x^2z - 6yz + 3xz^2 + 6yz^2 - 2z^3 - 3(x-z)^2 H(-x+y)H(-x+z)+\\
+2(-x+z)^3 H(-x+y)H(-x+z) + 6y(y-z)H(-y+z) + 6x(-y+z)H(-y+z)+\\
+2(-y+z)^3 H(-y+z) + 6x(y-z)H(-x+y)H(-y+z)+\\
+2(y-z)^3 H(-x+y)H(-y+z) + 6y(-y+z)H(-x+y)H(-y+z)).
\end{gathered}$$

здесь $H(x)$ — функции Хевисайда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dahiya R.S., Jabar Saberi-Nadjafi* Theorems on n-dimensional Laplace transforms and their applications // 15th Annual Conf. of Applied Math., Univ. of Central Oklahoma, Electr. Journ. of Differential Equations, Conf.02, 1999. P. 61-74.

2. *Dimovski I., Spiridonova M.* Computational approach to nonlocal boundary value problems by multivariate operational calculus // Mathem. Sciences Research Journal, Dec. 2005. V. 9. № 12. P. 315-329.

3. *Malaschonok N.* Parallel Laplace Method with Assured Accuracy for Solutions of Differential Equations by symbolic computations // Computer Algebra and Scientific Computing, CASC 2006, LNCS 4196. Berlin, 2006. P. 251-261.

4.*Malaschonok G.I.* Effective Matrix Methods in Commutative Domains / Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Berlin, 2000. P. 506-517.

5. *Malaschonok G.I.* On computation of kernel of operator acting in a module // Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences. Tambov, 2008. V. 13. Issue 1. (Russian).

6. *Malaschonok G.I.* Fast matrix decomposition in parallel computer algebra // Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences. Tambov, 2010. V. 15. Issue 4. P. 1372-1385.

7. *Watt S.M.* Pivot-Free Block Matrix Inversion // Proc 8th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms in Symbolic Computation (SYNASC), IEEE Computer Society, 2006. P. 151-155. URL: http://www.csd.uwo.ca/ watt/pub/reprints/2006-synasc-bminv.pdf.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» (проект № 2.1.1/1853); темплана 1.12.09.

Поступила в редакцию 25 августа 2010 г.

Malaschonok N. A. An example for symbolic solving systems of partial differential equations.

An algorithm for symbolic solving systems of partial differential equations by means of multivariate Laplace-Carson transform is described and demonstrated by an example.

Key words: symbolic algorithm; systems of partial differential equations.