УДК 519.688

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПОЗИЦИЙ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНОМ КОЛЬЦЕ

© Д.И. Шляпин

Ключевые слова: логарифмические функции; экспоненциальные функции; композиция функций; компьютерная алгебра.

Приводятся алгоритмы преобразования композиции функций, которые содержат логарифмические и экспоненциальные функции. Алгоритмы основаны на логарифмических и экспоненциальных тождествах и дробно-рациональных преобразованиях.

1 Введение

Одной из важных задач компьютерной алгебры является задача преобразования композиций трансцендентных функций к определенным видам. Композицию функций можно рассматривать как функциональное дерево. Преобразование функции сводится к некоторой стратегии обхода такого дерева и преобразования его поддеревьев с помощью функциональных тождеств [1–3]. Будем рассматривать следующие два способа преобразований.

1. Преобразование тождеств, описанных ниже, осуществляемое справа налево, будем называть **факторизацией**.
2. Преобразование, осуществляемое слева направо, будем называть **разложением**.

Будем использовать следующие тождества.

$$\log_a(b \cdot c) \rightleftarrows \log_a b + \log_a c; \quad \log_a \frac{b}{c} \rightleftarrows \log_a b - \log_a c, \tag{1}$$

$$\log_a b^c \rightleftarrows c \cdot \log_a b; \quad \log_{a^c} b \rightleftarrows \frac{1}{c} \cdot \log_a b, \tag{2}$$

$$\log_a b \to \frac{\log_c b}{\log_c a}, \tag{3}$$

$$\log_c b \leftarrow \log_c a \cdot \log_a b; \quad b \leftarrow a^{\log_a b}, \tag{4}$$

$$2\operatorname{ch}(z) \leftarrow \exp(z) + \exp(-z); 2i\operatorname{sh}(z) \leftarrow \exp(z) - \exp(-z),$$

$$2\cos(z) \leftarrow \exp(iz) + \exp(-iz); \quad 2i\sin(z) \leftarrow \exp(iz) - \exp(-iz), \tag{5}$$

$$2i\arctan(z) \leftarrow ln(1+iz) - ln(1-iz); \quad 2i\,\mathrm{arcctg}(z) \leftarrow ln(1-iz) - ln(1+iz). \tag{6}$$

Разделим данные тождества на две группы, применяемые в кольцах R и C соответственно. К первой группе отнесем тождества (1)-(4), ко второй — (5)-(6).

2 Алгоритм факторизации

Пусть дана композиция функций F.

1. Перейдем от функционального дерева к рациональной функции многих переменных $P = \frac{N}{D}$, где N и D — полиномы [4].

2. Будем упрощать отдельно многочлены N и D. Представим многочлены N и D в виде $N = N_1 + N_2$ и $D = D_1 + D_2$, где N_1 и D_1 содержат одночлены, в которых хотя бы одна переменная является логарифмической или экспоненциальной функцией. Полиномы N_2 и D_2 не содержат переменных, соответствующих искомым функциям. Далее преобразовывать будем только N_1 и D_1.

3. Рассматриваем всевозможные пары мономов полинома N_1 и пытаемся заменить по формулам (1) сумму или разность логарифмов их произведением или частным. Это преобразование состоит из следующих шагов.

   - Если есть общий терм, то выносим его за скобки. Далее будем работать с полиномом в скобках.
   - Если перед мономом стоит числовой коэффициент, то записываем его как степень аргумента логарифма, применяя формулы (2).
   - Раскладываем полином на множители.
   - К каждому сомножителю применяем алгоритм факторизации.

   Если можно выполнить факторизацию по формулам (1), то выполняем ее и получаем вместо пары один новый моном, который является выражением, стоящим в левой части одного тождества (1).

4. Возвращаемся к шагу 3 и повторяем до тех пор, пока есть хотя бы одно преобразование.

5. Проверяем возможность преобразования по формулам (4) всех мономов полученного многочлена. Если есть хотя бы одно преобразование, то выполняем преобразование и возвращаемся к шагу 3.

6. Применяем факторизацию по формулам (5), а затем по формулам (6) по схеме, описанной на шагах 3 и 4.

7. Шаги 3 — 6 выполняем для многочлена D_1.

8. Вводим обратную замену.

3 Алгоритм разложения логарифмической функции

Отметим, что если.факторизация применима для всех формул (1) — (6), то разложение выполняется только по формулам (1) — (3). Пусть дана композиция функций F. Будем применять алгоритм только для функций вида $\log_\alpha(\beta)$, где аргументы α и β являются композицией трансцендентных функций, $i = 1, \dots, n$. Если α и β являются произведением, или дробью, то к нему применяются тождества (1) — (3).

1. Если аргумент α не является числом, то применим формулу (3), где новым основанием будет e. Далее упрощаем отдельно числитель и знаменатель полученной дроби.

2. Рассмотрим логарифм, стоящий в числителе получившейся дроби. Если аргумент β является произведением множества термов, то представим их в виде $\beta = a \cdot b$, где a — первый множитель соответствующего аргумента, b — остальные. Применим соответствующие тождества (2) и формулу преобразования логарифма в сумму из формул (1).

3. Если аргумент β — дробь, то вначале применим формулу преобразования логарифма в разность из формул (1), а затем к каждому получившемуся логарифму попытаемся применить действия, описанные в первом шаге.

4. Будем повторять шаги 1 — 2 до тех пор, пока применимы тождества (1) — (2).

5. Шаги 2 — 4 выполняем для логарифма, стоящего в знаменателе.

Выполняем обратную замену.

4 Примеры

Пример 1. Представить в виде композиции функцию $\ln(x^3 \cdot 4x)$.
В результате выполнения алгоритма разложения получим $\ln(4) + 4 \cdot \ln(x)$.
Пример 2. Упростить функцию $\log_2(x) + \log_2(y) - \log_2(xz) + \lg(y) + \lg(y) - \lg(z)$.
В результате применения к данной функции алгоритма факторизации получим
$\log_2(\frac{y}{z}) + \lg(\frac{y^2}{z})$.
Пример 3. Упростить функцию $\ln(1-ix) - \ln(1+ix) + \exp(ix) - 2\exp(-ix) + \sin(x)^2 - \cos(x)^2$.
В результате применения к данной функции алгоритма факторизации получим
$(2.00i \operatorname{arcctg}(x)) + (2.00i(\sin(x))) - (\cos(2.00x) + \exp(1.00ix))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малашонок Г.И.* О проекте параллельной компьютерной алгебры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 4. С. 744-748.

2. *Малашонок Г.И.* Компьютерная математика для вычислительной сети // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 322-327.

3. *Малашонок Г.И.* О вычислении ядра оператора, действующего в модуле // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 129-131.

4. *Шляпин Д.И.* Преобразование композиции функций, содержащих тригонометрические функции // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 2. С. 603-607.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-07-00755-а.

Поступила в редакцию 20 декабря 2012 г.

Shlapin D.I. TRANSFORMATION OF FUNCTION COMPOSITION WITH LOGARITHMIC AND EXPONENTIAL FUNCTIONS IN COMPLEX RING.

We discuss algorithms for converting the composition of functions that contain logarithmic and exponential functions. Algorithms are based on logarithmic and exponential identities and of rational simplifications.

Key words: logarithmic functions, exponential functions, function composition, computer algebra.