

УДК 519.688

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

© А.А. Бетин

Ключевые слова: параллельный алгоритм; корни уравнения.

Дается описание параллельного алгоритма вычисления комплексных корней уравнения и приводятся результаты экспериментов на суперкомпьютере МВС-100К Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

1 Введение

Вычисление корней полиномов — узловая проблема во многих разделах математики, в т. ч. и в компьютерной алгебре. Задача вычисления корней над полем комплексных чисел наиболее актуальна. Для вычисления будем использовать метод Ньютона обобщенный на комплексную плоскость $z_{n+1} = z_n + \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, где $z_n \in C$, $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Подробно метод вычисления комплексных корней описан в работах [1-2].

2 Параллельный алгоритм

Область, в которой находятся все решения уравнения $f(z) = 0$, представляет собой полуокружность, радиус которой r превышает модуль любого комплексного корня полинома $f(z)$. Эта область разбивается на секторы, количество секторов равно количеству процессоров. Нулевой процессор рассылает исходный полином всем процессорам. Каждый процессор вычисляет верхнюю границу корней r и определяет сектор, в котором будет производить поиск решений (рис. 1).

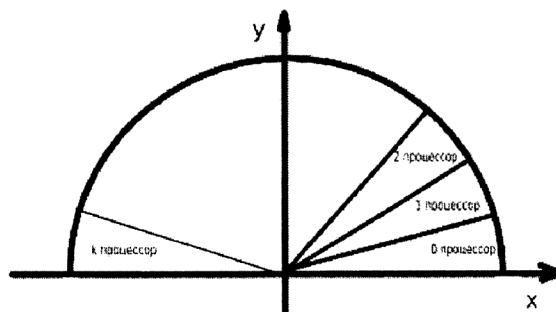


Рис. 1. Разбиение полукруга на секторы, закрепленные за процессорами

Каждый процессор выбирает случайную точку в своем секторе и по методу Ньютона начинает спуск к корню уравнения. Так как точка берется случайно, то найденные корни могут повторяться. Каждый процессор сравнивает новый корень с теми которые уже были найдены ранее. Новый корень дописывается в локальный список и отсылается нулевому процессору. Нулевой процессор также сравнивает полученные корни с уже имеющимися и сохраняет все новые решения. Когда нулевой процессор получает n различных комплексных корней для полинома степени n , то вычисления останавливаются, и все процессоры получают сообщение о прекращении вычислений.

3 Результаты экспериментов

С описанным алгоритмом была проведена серия экспериментов на суперкомпьютере МВС-100К Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН. Результаты экспериментов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Время вычисления комплексных корней уравнения n -ой степени на N процессорах (мс)

n / N	4	8	16	32	64	128
20	11577	2628				
30	71879	9395	5328			
40	94808	59606	20439	10902		
50				38518	22744	
100						250905

Если время вычислений в группе, содержащей m процессоров, равно t_m , а время вычислений на k процессорах t_k ($m < k$), то ускорением будем называть следующую величину:

$$\alpha_{m,k} = (t_m/t_k - 1)/(k/m - 1) \cdot 100 \%. \quad (1)$$

Таблица 2

Ускорение вычислений комплексных корней

$n / \alpha_{m,k}$	$\alpha_{4,8}$	$\alpha_{8,16}$	$\alpha_{16,32}$	$\alpha_{32,64}$
20	340%			
30	665%	76%		
40	59%	191%	87%	
50				69%

Из результатов экспериментов видно, что алгоритм имеет хорошее ускорение. С увеличением размера задачи ускорение сохраняется при больших количествах процессоров. Например, при степени полинома равной 50, при переходе с 16 на 32 процессора ускорение составило 69 %.

Во время проведения экспериментов было замечено, что при большом количестве процессоров (больше 16) нулевой процессор лучше освободить от поиска корней в своем секторе. Его роль — получение и контроль корней, которые ему присылают другие процессоры. Это позволило получить ускорение времени вычислений примерно на 20 %.

Планируется продолжить эксперименты с алгоритмами параллельного вычисления корней полиномов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Betin A.A.* On computation of complex roots of polynomials. International conference Polynomial Computer Algebra. St. Petersburg: PDMI RAS, 2008. P. 7-8. (Russian)
2. *Малашонок Г.И., Бетин А.А.* Вычисление комплексных корней полиномов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 138-141.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-07-00755-а.
Поступила в редакцию 20 декабря 2012 г.

Betin A.A. PARALLEL ALGORITHM FOR CALCULATIONS COMPLEX ROOTS
OF POLYNOMIALS.

We describe a parallel algorithm for computing the complex roots of an equation and experimental results on the MVS-100K supercomputer of Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences.

Key words: parallel algorithm, complex roots.