УДК 519.688

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПОЗИЦИЙ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

© Д. И. Шляпин

Ключевые слова: тригонометрические функции, композиция функций, компьютерная алгебра.

Приводятся алгоритмы преобразования композиции функций, которые содержат тригонометрические функции. Алгоритмы основаны на тригонометрических тождествах и дробно-рациональных преобразованиях. Алгоритмы используются в системе компьютерной алгебры Mathpar.

1 Введение

Одной из важных задач компьютерной алгебры является задача преобразования композиций трансцендентных функций к определённым видам. Композицию функций можно рассматривать как функциональное дерево. Преобразование функции сводится к некоторой стратегии обхода такого дерева и преобразования его поддеревьев с помощью функциональных тождеств. Будем рассматривать следующие два способа преобразований.

1. Преобразование стоящее в тождественной замене суммы или произведения композиций трансцендентных функций одной трансцендентной функцией или числом. Будем называть такой способ **симплификацией**.

2. Преобразование, обратное симплификации будем называть **разложением**.

В этой работе мы рассмотрим преобразования функций, содержащих тригонометрические функции. Для симплификации будем использовать следующие тождества.

$$1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha), \tag{1}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta), \tag{2}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha), \tag{3}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta), \tag{4}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha). \tag{5}$$

2 Переход от композиции трансцендентных функций к рациональной функции многих переменных

Пусть дана функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, которая является композицией трансцендентных функций. «Листьями» дерева этой функции являются дробно-рациональные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Выделим все различные трансцендентные функции, которые расположены на верхнем уровне дерева данной функции. Каждая функция, входящая в композицию, является поддеревом дерева данной функции. Заменим каждую из функций новой переменной u_i, $i = 1, \ldots, k$. В результате получим дробно-рациональную функцию $P(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k$. Преобразуем функцию P к отношению двух полиномов. Найдем наибольший общий делитель числителя и знаменателя, сократим дробь на него. Сохраним его, чтобы учесть в области определения данной функции. После сокращения получим функцию $P = \frac{N}{D}$, где N и D — полиномы.

3 Алгоритм симплификации

Пусть дана композиция функций F.

1. Перейдём от функционального дерева к рациональной функции многих переменных $P = \frac{N}{D}$, где N и D — полиномы.

2. Будем упрощать отдельно многочлены N и D.

   Представим многочлены N и D в виде $N = N_1 + N_2$ и $D = D_1 + D_2$, где N_1 и D_1 содержат одночлены, в которых хотя бы одна переменная является тригонометрической функцией. Полиномы N_2 и D_2 не содержат переменных, соответствующих тригонометрическим функциям. Далее преобразовывать будем только N_1 и D_1.

3. Рассматриваем всевозможные полиномы, образованные парами мономов полинома N_1. Каждый из них раскладываем на полиномиальные множители. Если сомножитель содержит более двух мономов, то применяем рекурсивно алгоритм симплификации. Если сомножитель содержит два монома, то пытаемся найти соответствующее тригонометрическое тождество и применить его.

   Если можно выполнить симплификацию (1) — (4), то выполняем её и получаем вместо пары один новый моном.

4. Возвращаемся к шагу 3 и повторяем, пока есть хотя бы одно преобразование.

5. Проверяем возможность преобразования по формуле (5) всех мономов полученного многочлена. Если есть хотя бы одно преобразование, то выполняем преобразование и возвращаемся к шагу 3.

6. Шаги 3 — 5 выполняем для многочлена D_1.

7. Вводим обратную замену.

4 Алгоритм разложения.

Пусть дана функция $F = \prod_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i)\cos(\beta_i)$. Аргументы α_i и β_i являются композициями трансцендентных функций, $i = 1,\ldots,n$. Если аргументы α_i и β_i являются суммами, разностями или делятся нацело на два, то к ним применяются тождества (2) — (5).

1. Аргументы α_i и β_i представим в виде $\alpha_i = a + b$ и $\beta_i = c + d$, где a и c — первые мономы соответствующего аргумента, b и d — остальные часть аргументов. Применим соответствующие тригонометрические тождества к $\sin(a+b)$ и $\cos(c+d)$.

2. Будем повторять шаг 1 до тех пор, пока применимы тождества (2) — (5).

Выполняем обратную замену.

5 Примеры

<u>**Пример 1**</u>. Упростить функцию

$$\sin(y)\cos(x)\cos(z) + \ln(x) + \mathrm{tg}(y) + \cos(y)\sin(x)\cos(z) + \sin(z)\cos(y+x) + x^3.$$

В результате выполнения алгоритма факторизации, получим

$$x^3 + \sin(z+y+x) + \ln(x) + \mathrm{tg}(y).$$

<u>**Пример 2**</u>. Представить в виде композиции функцию $\cos(x^3 + x^2 + x)$.
В результате применения к данной функции алгоритма разложения, получим

$$\cos(x^3)(\cos(x^2)\cos(x) - \sin(x^2)\sin(x)) - \sin(x^3)(\sin(x^2)\cos(x) + \cos(x^2)\sin(x)).$$

<u>**Пример 3**</u>. Представить в виде композиции функцию $\cos(\cos(x) + \sin(x))$.
В результате применения к данной функции алгоритма разложения, получим

$$\cos(\sin(x))\cos(\cos(x)) - \sin(\sin(x))\sin(\cos(x)).$$

<u>**Пример 4**</u>. Представить в виде композиции функцию $\cos(\cos(x+1) + \sin(x))$.
В результате применения к данной функции алгоритма разложения, получим

$$(\cos(\sin(x)\sin(1))(\cos(\sin(x))\cos(\cos(x)\cos(1)) - \sin(\sin(x))\sin(\cos(x)\cos(1)))-$$

$$(-1)\sin(\sin(x)\sin(1))(\sin(\sin(x))\cos(\cos(x)\cos(1)) + \cos(\sin(x))\sin(\cos(x)\cos(1)))).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хабибулин И.* Самоучитель Java 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
2. *Ноутон П., Шилдт Г.* Java 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2008 г.

3. *Малашонок Г.И.* О проекте параллельной компьютерной алгебры // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Том 14. Вып. 4. 2009. С. 744-748.

4. *Малашонок Г.И.* Компьютерная математика для вычислительной сети // Вестник Тамбовского университета. Сер.: Естественные и технические науки. Том 15. Вып. 1. 2010. С. 322-327.

5. *Малашонок Г.И.* О вычислении ядра оператора, действующего в модуле // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Том 13. Вып. 1. 2008. С. 129-131.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-07-00755-а) и программы «Развитие потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/10437).

Поступила в редакцию 20 февраля 2012 г.

TRANSFORMATION OF COMPOSITIONS OF FUNCTIONS CONTAINING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

© **Dmitry Igorevich Shlapin**
Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Internatsionalnaya, 33, Tambov, 392000, Russia, Post-graduate Student of Mathematical Analysis Department, e-mail: shlapin.dmitry@gmail.com

Key words: trigonometric functions, function composition, computer algebra Mathpar.
Discusses the algorithms for converting the compositions of functions, which contain trigonometric functions. We use the basic trigonometric identities and rational-fractional transformations. These algorithms are used in computer algebra system Mathpar.