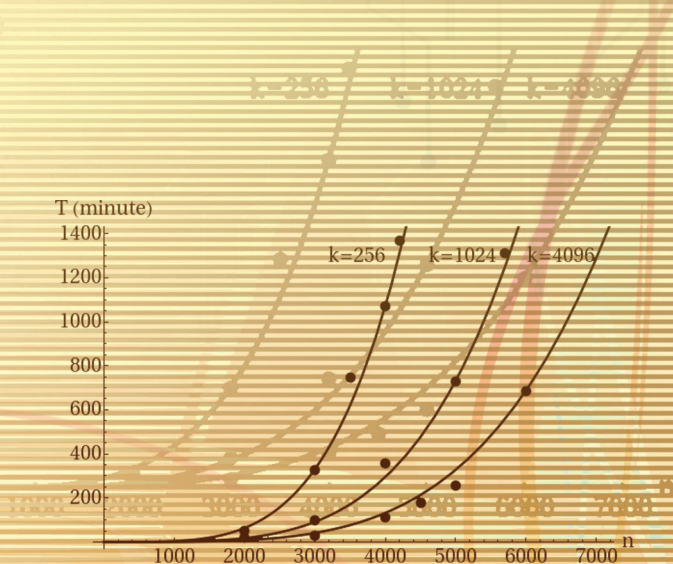


Параллельные символьные вычисления



14 Parallel Symbolic Computation

Symbolic computation with large data is impossible without supercomputers. Today's challenge is to create a system of symbolic computation with the use of supercomputers. This will lead to a qualitative leap in computing technology in many applications. For illustration, we consider two examples: computation of the characteristic polynomial of a linear operator, and factoring polynomials.

Key words: parallel symbolic computation, characteristic polynomial, factorization of polynomials.

AUTHORS:

G. I. Malaschonok – Sc.D., Professor, Tambov State University
e-mail: malaschonok@ya.ru

O. N. Pereslavl'tseva – Assistant Professor, Tambov State University
e-mail: oxana.pereslavl'tseva@gmail.com

D. S. Ivashov – Assistant Professor, Tambov State University
e-mail: ivashovdmitry@gmail.com

Символьные вычисления с большим объемом данных невозможны без суперкомпьютеров. Сегодня стоит задача создания системы символьных вычислений с использованием суперкомпьютеров. Это приведет к качественному скачку вычислительных технологий во многих приложениях. Для иллюстрации мы рассматриваем два примера: вычисление характеристического полинома линейного оператора и разложение на множители полиномов многих переменных.

Ключевые слова: параллельные символьные вычисления, характеристический полином, факторизация полиномов.

АВТОРЫ:

Г. И. Малашонок – д.ф.м.н., профессор, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
e-mail: malaschonok@ya.ru

О. Н. Переславцева – к.ф.м.н., ассистент, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
e-mail: oxana.pereslavltsveva@gmail.com

Д. С. Ивашов – ассистент, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
e-mail: ivashovdmitry@gmail.com

Развитие вычислительной техники и теории алгоритмов приводит к постепенному переходу от численного моделирования к символьно-численному моделированию в самых разных областях науки и техники. Этому способствует повышение быстродействия компьютерных систем, появление новых эффективных алгебраических алгоритмов, потребность в более точных и адекватных моделях во многих прикладных областях. Теоретической основой для алгоритмов и программ является компьютерная алгебра или теория символьных вычислений.

Существующие системы компьютерной алгебры (MAPLE, Mathematica, CoCoA, Reduce и др.) предназначены для персональных компьютеров. Их можно применять одновременно на нескольких процессорах, и это позволяет сократить время решения некоторых задач с естественным параллелизмом, например, переборных задач.

Однако, как показала история создания числовых пакетов линейной алгебры (LAPAC и ScaLAPAC), многопроцессорные комплексы требуют новых подходов к созданию программных пакетов. Структуры данных и алгоритмы должны быть изначально ориентированы на применение параллельных вычислительных систем.

Сложность символьных вычислений существенно выше, чем численных. Поэтому с появлением суперкомпьютеров символьные вычисления переживают новый этап развития.

Чтобы увидеть, как растет сложность вычислений при переходе к символьным вычислениям, рассмотрим пример. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными требует $\sim n^3$ операций. Забудем пока о специальных быстрых алгоритмах или особых видах матриц. Если все числа в системе являются целыми и для их записи нужно m машинных слов, то для точного решения такой системы нужно $\sim n^5 m^2$ операций. Если решать эту задачу, переходя к многим конечным полям, то потребуется $\sim n^4 m^2$ операций, а p -адический метод позволяет решить задачу за $\sim n^3 m^2$ операций [1].

Теперь рассмотрим символьную матрицу. Пусть, например, требуется решить систему линейных уравнений, где каждый коэффициент — полином степени d с целыми коэффициентами. Прямые вычисления потребуют $\sim n^3(nd)^2(nm)^2$ операций. Мы не выписываем логарифмические множители. Если решать эту задачу, переходя к многим конечным полям, то потребуется $\sim n^5 dm$ операций. Даже если все полиномы имеют первую степень и коэффициенты занимают одно машинное слово, то точное решение такой системы в n^2 раз сложнее, чем приближенное решение числовой системы. И для реше-

ния системы размера 1000×1000 требуется в миллион раз больше операций. Следовательно, без суперкомпьютера не обойтись.

Задача, которая стоит сегодня, — это создание системы символьных вычислений для проведения вычислений на суперкомпьютере. Это станет качественным скачком современных вычислительных технологий. Такая система найдет применение при решении задач во многих разделах физики, химии, биологии, в задачах математического моделирования в электронике, радиотехнике, управлении и других областях. Появится возможность решать трудные задачи с большим числом переменных за реально допустимое время. Это требует создания новых подходов и алгоритмов.

Исследования, проводимые в Тамбовском государственном университете, направлены на разработку быстрых методов вычислений с полиномами многих переменных, композициями трансцендентных функций, функциональными матрицами и другими математическими объектами. Это задачи вычисления присоединенных и обратных матриц, треугольного разложения и разложения Брюа, вычисления базисов Грёбнера и характеристических полиномов матриц, факторизации полиномов и другие задачи. Разрабатываются специальные структуры данных для представления алгебраических объектов в программной среде, которые предназначены для эффективного распараллеливания вычислительного процесса. Важной особенностью символьных вычислений, представляющей трудность для организации параллельных вычислений, является разреженность и неоднородность символьных данных. Поэтому разрабатывается динамическая децентрализованная схема управления параллельным вычислительным процессом.

В качестве иллюстрации мы рассмотрим два примера. Первый — это задача вычисления характеристического полинома линейного оператора, который задан матрицей над полиномами многих переменных с целыми коэффициентами. Второй — это задача факторизации полиномов многих переменных с целыми коэффициентами.

Вычисление характеристических полиномов линейных операторов

Характеристическим полиномом матрицы A линейного оператора называется полином $F(x) = \det(A - xE)$, где E — единичная матрица. Характеристические полиномы являются важными матричными инвариантами и используются во всех приложениях теории матриц, во многих разделах физики и в инженерных задачах. Непосредственное вычисление коэффициен-

тов характеристического полинома для целочисленной или полиномиальной матрицы требует большого числа операций. Поэтому применяется алгоритм, основанный на методе гомоморфных образов [2].

Общая схема метода гомоморфных образов следующая: (1) фиксируется необходимое количество простых числовых и полиномиальных модулей, (2) находятся образы исходной матрицы полиномов в каждом соответствующем факторкольце, и для них вычисляются характеристические полиномы, (3) восстанавливается решение в исходной области.

Алгоритм естественно распараллеливается по отдельным модулям, т. е. вычисление характеристического полинома по каждому простому модулю происходит независимо, затем восстанавливаются искомые коэффициенты характеристического полинома. Все вычисления происходят на листовых вершинах: за каждой листовой вершиной закрепляется некоторое число простых модулей и множество коэффициентов характеристического полинома, которые будут восстанавливаться на этой вершине. Перед восстановлением происходит обмен данными между листовыми вершинами. Восстановленные коэффициенты передаются сразу с листовых вершин в корневую вершину.

Получена следующая оценка времени вычислений. Пусть A — полиномиальная матрица размера $p \times p$, элементы которой являются полиномами от t переменных, у этих полиномов a — наибольший по абсолютной величине числовой коэффициент, s — наибольшее количество мономов, deg_i — наибольшая степень по переменной x_i , ($i=1, \dots, t$), k — количество процессоров, тогда время, необходимое для вычисления характеристического полинома без учета времени пересылки данных между процессорами, равно

$$T_{n,k} = \theta \left(\frac{1}{k} n^4 (\log_2 n + \log_2 a + \log_2 s) \prod_{i=1}^t deg_i \right).$$

А время, необходимое для пересылки данных между процессорами в n^2 раз меньше, чем $T_{n,k}$. Это позволяет прогнозировать время вычисления характеристического полинома. Используя результаты экспериментов, проведенных на кластере MVS100k МСЦ РАН, построены графики зависимости прогнозируемого времени вычислений характеристических полиномов числовых и полиномиальных матриц от размера матриц. На графиках (рис. 1, рис. 2) отмечены точки, которые получены экспериментально.

Полученные графики можно использовать для вычисления характеристического полинома на кластере MVS100k. По ним можно определить, сколь-

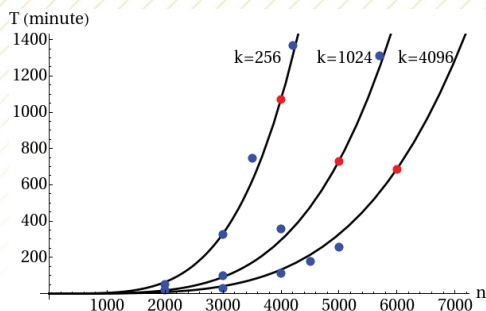


Рис. 1.

Время вычисления характеристического полинома для числовой матрицы размера $n \times n$, элементами которой являются 7-разрядные двоичные числа, при использовании k процессоров

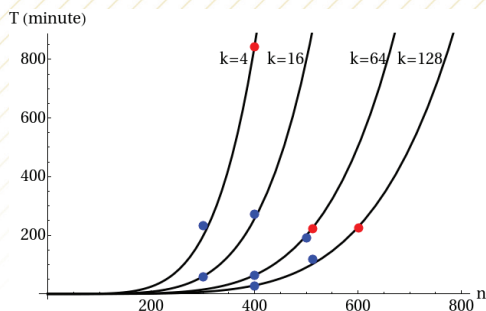


Рис. 2.

Время вычисления характеристического полинома для полиномиальной матрицы $n \times n$, элементами которой являются линейные полиномы одной переменной с 7-разрядными двоичными коэффициентами, при использовании k процессоров

ко нужно заказывать машинного времени для заданного числа процессоров кластера и размера матрицы.

Алгоритм разложения многочленов многих переменных на множители

Пусть $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен от n переменных $x_1, \dots, x_n$ с целочисленными коэффициентами. Схема факторизации состоит из следующих этапов [3].

Этап 1. Вычисление сомножителей $f_1, \dots, f_{2^{n-1}}$, имеющих различные наборы переменных: $F(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_{2^{n-1}}(x_1, \dots, x_n)$.

Этап 2. Вычисление кратных сомножителей h_{ij} многочленов $f_i: f_i = \prod_{j=1}^{r_i} h_{ij}^{s_{ij}}$, где $i=1, \dots, 2^{n-1}$, S_{ij} — кратность j -го сомножителя и $S_{ij} \neq S_{ik}$ при $j \neq k$.

Этап 3. Вычисление неприводимых сомножителей $g_{ijk}: h_{ij} = \prod_{k=1}^{r_k} g_{ijk}^{s_{ijk}}$. В результате многочлен $F(x_1, \dots, x_n)$ будет записан в виде

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} f_i = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} \prod_{j=1}^{r_j} h_{ij}^{s_{ij}} = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} \prod_{j=1}^{r_j} \prod_{k=1}^{r_k} g_{ijk}^{s_{ijk}}.$$

Уменьшение числа операций и удобная схема распараллеливания, как и в прошлом примере, достигается за счет применения метода гомоморфных образов. Но теперь используются только числовые модули: (1) выбирается необходимое количество простых числовых модулей, (2) факторизуются полиномы в каждом факторкольце, (3) восстанавливается искомым факторизованный по-

лином.

Для иллюстрации выбран многочлен от трех переменных. Он имеет семь сомножителей, каждый из которых имеет кратность 5 или 7:

$$F(x, y, z) = f_1^5(x) f_2^7(y) f_3^7(z) f_4^5(x, y) f_5^5(x, z) f_6^7(y, z) f_7^7(x, y, z),$$

f_i — неприводимые плотные многочлены со 100-битными коэффициентами, у которых старшая степень по каждой переменной равна 2. Приведем время, которое требуется для разложения на множители такого многочлена для различного количества процессоров в кластере MVS100k МСЦ РАН.

В таблице t_n — это время вычисления на n процессорах, величина $S_n = t_1/t_n$ показывает, во сколько раз быстрее происходят вычисления на n процессорах по сравнению с вычислением на одном процессоре, величина $E_n = 100S_n/n$ показывает эффективность параллельного алгоритма.

Таблица 1. Время, ускорение и эффективность параллельной програм-

Количество процессов n	1	2	4	8	16	32
Время, с	2819	1429	752	379	202	113
Ускорение S_n		1,97	3,75	7,5	14	25
Эффективность E_n , %		98,6	94	93	87,2	78

мы факторизации многочленов.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 12-07-00755а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malaschonok G. I. *Effective Matrix Methods in Commutative Domains, Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, Springer, Berlin, 2000, 506–517.
2. Переславцева О. Н. О вычислении коэффициентов характеристического полинома. Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2008. – Т. 9. – № 2. – С. 180–184.
3. Ивашов Д. С. Об алгоритме факторизации полиномов многих переменных // Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2012. – 17. – Вып. 2. – С. 591–597.